Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas IV (MA-2115)
Septiembre-Diciembre 2008

**$2^{\text{da}}$ Autoevaluación**

**Material Cubierto:** La presente autoevaluación versa sobre el material cubierto en las clases 8 a 10 del cronograma del curso, es decir, las secciones 1, 2.1-2.4, 2.6, 3-4, 5 y 6.1 del texto de los profesores Viola-Prioli.
**Nota:** La presente autoevaluación no tiene ningún valor para la nota final de este curso.
**Instrucciones:** Esta autoevaluación consta de 2 partes, que preferiblemente deberían ser resueltas en orden y después que Ud. haya estudiado el material correspondiente. Cada parte tiene sus propias instrucciones. Las respuestas están al final de cada parte. Esta autoevaluación puede ser bajada de la página web del departamento de matemáticas `http://www.ma.usb.ve/`. Se le sugiere revise frecuentemente dicha página web, ya que a lo largo del trimestre irán apareciendo más autoevaluaciones.
**Notación** La función logaritmo natural, es decir, la función inversa de $g(x) = e^x$ se denotará por $f(x) = \log(x)$.
**Sobre el tiempo estimado:** El tiempo estimado de cada sección se obtuvo multiplicando por 5 el tiempo que me tomó a mí resolver los problemas (en algunos casos agregando unos minutos para tener, por ejemplo, 25min en vez de 22min 30seg).
**¿Comentarios, preguntas o errores?** Escriba a la dirección `fojeda@usb.ve` (Prof. Francisco Ojeda). Por favor use el código (MA-2115) o nombre de este curso en el encabezado de su mensaje (ya que en caso contrario por desconocer al remitente probablemente borre su mensaje sin leerlo).

# 1. Desarrollo

**Tiempo estimado:** 1hora 10 minutos
**Instrucciones:** Resuelva los siguiente problemas, justificando sus respuestas. Marque la respuesta correcta en cada una de las siguientes preguntas. Al finalizar, y antes, de proceder a la parte 2, verifique si sus respuestas son correctas. Se le sugiere que también lea las resoluciones de los problemas proporcionados. Recuerde si su solución y la solución publicada difieren en el procedimiento, esto no necesariamente significa que su solución sea incorrecta, ya que puede haber más de una manera de resolver un problema. Por otro lado, el hecho que Ud. haya indicado la respuesta correcta, no significa que el procedimiento que Ud. usó esté necesariamente bien. Si Ud. tiene una duda respecto a su solución o a la solución proporcionada se le sugiere consulte a su profesor.

## 1.1. Preguntas

**Pregunta 1.1.** Sea $\mathcal{F}$ la familia de curvas con ecuación $y = \frac{1}{2x+k}$ con $k \in \mathbb{R}$. Encuentre una ecuación diferencial satisfecha por las trayectorias ortogonales de $\mathcal{F}$.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2y^2}$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y^2}$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{y^2}$

(d) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$

(e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y^2}$

**Pregunta 1.2.** Encuentre los valores de $k$ para los cuales $y = e^{kx}$ es solución de la ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

(a) $k = -1$ y $k = -2$

(b) $k = 1$ y $k = 2$

(c) $k = 1$ y $k = -2$

(d) $k = -1$ y $k = 2$

(e) $k = 1$ y $k = -1$

**Pregunta 1.3.** Resuelva la ecuación diferencial

$$y' - 3x^2y = 9x^2$$

(a) $y = -3 + Ce^{9x^2}$

(b) $y = 3 + Ce^{x^9}$

(c) $y = -3 + e^{x^3} + C$

(d) $y = 3 + Ce^{-x^3}$

(e) $y = -3 + Ce^{x^3}$

**Pregunta 1.4.** El cultivo de una cierta bacteria tiene una tasa de crecimiento que es proporcional a su tamaño. Después de 2 horas el cultivo tiene 600 bacterias y después de 4 horas 3000. Encuentre una ecuación diferencial (y su solución), para el número de bacterias en el cultivo después de $t$ horas.

(a) Eq. Dif.: $y'(t) = y(t)$ con $y(0) = 50$. Sol: $y(t) = 50e^t$

(b) Eq. Dif.: $y'(t) = \frac{\log(5)}{2} y(t)$ con $y(0) = 100$. Sol: $y(t) = 100e^{\frac{\log(5)}{2}t}$

(c) Eq. Dif.: $y'(t) = \frac{\log(5)}{2} y(t)$ con $y(0) = 120$. Sol: $y(t) = 120 \cdot 5^{\frac{t}{2}}$

(d) Eq. Dif.: $y'(t) = 4y(t)$ con $y(0) = 600$. Sol: $y(t) = 600e^{4t}$

(e) Eq. Dif.: $y'(t) = -3y(t)$ con $y(0) = 120$. Sol: $y(t) = 120e^{-3t}$

**Pregunta 1.5.** Convierta a la ecuación de Bernoulli $y' + 2e^x y = x^3 y^{10}$ en una ecuación diferencial lineal de primer orden.

(a) $\omega'' + 2e^x \omega' = 1$

(b) $\omega' + 2e^x \omega = x^3$

(c) $\omega' + 18e^x \omega = 9x^3$

(d) $\omega' - 18e^x \omega = -9x^3$

(e) $\omega'' + 2e^x \omega' = -9x^3$

**Las respuestas a esta parte se encuentran en la página siguiente**

## 1.2. Respuestas

1.1(e), 1.2(b), 1.3(e), 1.4(c), 1.5(d)

## 1.3. Resolución de los problemas

**Solución 1.1.** Primero encontramos una ecuación diferencial para la familia de curvas $\mathcal{F}$. Observe que para ningún $x$ es posible que $y(x) = 0$ , por lo tanto tenemos que

$$y = \frac{1}{2x+k} \Rightarrow 2x + k = \frac{1}{y} \Rightarrow k = \frac{1}{y} - 2x.$$

Ahora diferenciamos $y = \frac{1}{2x+k}$,

$$y' = -\frac{2}{(2x+k)^2} = -\frac{2}{\left(2x + \frac{1}{y} - 2x\right)^2} = -\frac{2}{\left(\frac{1}{y}\right)^2} = -2y^2.$$

Hemos obtenido entonces la ecuación $\frac{dy}{dx} = -2y^2$. Entonces una ecuación diferencial para las trayectorias ortogonales de $\mathcal{F}$ es

$$-\frac{dx}{dy} = -2y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y^2}$$

**Solución 1.2.** Tenemos que $y' = ke^{kx}$ y $y'' = k^2e^{kx}$. Queremos encontrar $k$ tal que

$$k^2e^{kx} - 3ke^{kx} + 2e^{kx} = 0 \Leftrightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow (k-2)(k-1) = 0$$

y por lo tanto los valores que buscamos son $k = 2$ y $k = 1$.

**Solución 1.3.** $y' - 3x^2y = 9x^2$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma $y' + p(x)y = g(x)$ con $p(x) = -3x^2$ y $g(x) = 9x^2$ ambas continuas en $\mathbb{R}$, y por lo tanto sabemos que existen soluciones y que se obtienen multiplicando a la ecuación por el factor integrante $e^{\int(-3x^2)dx} = e^{-x^3}$:

$$e^{-x^3}y' - 3x^2e^{-x^3}y = 9x^2e^{-x^3} \Rightarrow \left(e^{-x^3}y\right)' = 9x^2e^{-x^3}.$$

Integrando a ambos lados de la última igualdad se obtiene[1]

$$e^{-x^3}y = \int 9x^2e^{-x^3}dx = -3e^{-x^3} + C,$$

es decir, $y = -3 + Ce^{x^3}$.

**Solución 1.4.** Sea $y(t)$ el número de bacterias en el cultivo después de $t$ horas. Entonces $y'(t)$ es la tasa de crecimiento, la cual es proporcional a $y(t)$, es decir, existe una constante $k$ positiva tal que $y'(t) = ky(t)$. Sabemos que esta ecuación diferencial tiene solución de la forma $y(t) = Ce^{kt}$ para alguna constante $C$. Además sabemos que $y(2) = 600$ y que $y(4) = 3000$, lo que implica que

$$600 = y(2) = Ce^{2k} \text{ y } 3000 = y(4) = Ce^{4k}.$$

[1] La integral $\int 9x^2e^{-x^3}dx$ se puede resolver (en caso que no lo vea directamente), usando la sustitución $u = -x^3$, $du = -3x^2dx$.

Entonces calculando el cociente $\frac{y(4)}{y(2)}$ tenemos

$$5 = \frac{3000}{600} = \frac{Ce^{4k}}{Ce^{2k}} = e^{2k}.$$

Aplicando logaritmo natural a ambos lados obtenemos $\log(5) = 2k$, es decir, $k = \frac{\log(5)}{2}$. Para hallar $C$ usamos nuevamente que $y(2) = 600$, entonces $600 = Ce^{2k} = Ce^{2\frac{\log(5)}{2}} = Ce^{\log(5)} = 5C$. Lo que implica que $C = \frac{600}{5} = 120$. Entonces

$$y(t) = 120e^{\frac{\log(5)}{2}t} = 120e^{\frac{t}{2}\log(5)} = 120e^{\log\left(5^{\frac{t}{2}}\right)} = 120 \cdot 5^{\frac{t}{2}}.$$

Observe que esto implica que $y(0) = 120$. Finalmente nuestra ecuación diferencial es

$$y'(t) = \frac{\log(5)}{2}y(t) \text{ con } y(0) = 120.$$

**Solución 1.5.** Donde $y \neq 0$, multiplicamos a ambos lados de nuestra ecuación por $\frac{1}{y^{10}}$, para obtener

$$y'y^{-10} + 2e^x y^{-9} = x^3.$$

Sea $\omega = y^{-9}$, entonces $\omega' = -9y^{-10}y'$ y por lo tanto nuestra ecuación se convierte en

$$\frac{\omega'}{-9} + 2e^x\omega = x^3 \Rightarrow \omega' - 18e^x\omega = -9x^3.$$

# 2. Desarrollo. Más problemas

**Tiempo estimado:** 1 hora
**Instrucciones:** Resuelva los siguiente problemas, justificando sus respuestas. Marque la respuesta correcta en cada una de las siguientes preguntas. Al finalizar, verifique si sus respuestas son correctas. Se le sugiere que también lea las resoluciones de los problemas proporcionados. Recuerde si su solución y la solución publicada difieren en el procedimiento, esto no necesariamente significa que su solución sea incorrecta, ya que puede haber más de una manera de resolver un problema. Por otro lado, el hecho que Ud. haya indicado la respuesta correcta, no significa que el procedimiento que Ud. usó esté bien. Si Ud. tiene una duda respecto a su solución o a la solución proporcionada se le sugiere consulte a su profesor.

## 2.1. Preguntas

**Pregunta 2.1.** Un tanque contiene 40L de una solución de agua y cloro que contiene 10 kg de cloro mezclados homogéneamente. Se bombea dentro del tanque a una velocidad de 4L/min una solución que contiene $\frac{1}{4}$kg de cloro por cada litro de agua. Al mismo tiempo se bombea fuera del tanque el líquido a una velocidad de 8L/min. Encuentre la cantidad de cloro en el tanque después de 5 minutos.

(a) 6kg

(b) 2kg

(c) 0kg

(d) 5kg

(e) 4kg

**Pregunta 2.2.** Resuelva $y' - 3y = -5y^2e^{2x}$, $y(0) = 2$. Encuentre el intervalo más grande donde su solución es válida.

(a) $y = \dfrac{1}{e^{2x} - \frac{e^{-3x}}{2}}$ para $x > -\frac{\log(2)}{5}$

(b) $y = \dfrac{1}{e^{2x} - \frac{e^{-3x}}{2}}$ para $x < -\frac{\log(2)}{5}$

(c) $y = \dfrac{2(e-1)}{e^{5x+1} - e^{3x}}$ para $x > -\frac{1}{2}$

(d) $y = \dfrac{2(e-1)}{e^{5x+1} - e^{3x}}$ para $x < -\frac{1}{2}$

(e) $y = \dfrac{2\cosh(x)}{e^{3x} + e^{-9x}}$ para $x \in \mathbb{R}$.

**Las respuestas a esta parte se encuentran en la página siguiente**

## 2.2. Respuestas

2.1(d), 2.2(a)

## 2.3. Resolución de los problemas

**Solución 2.1.** Sea $y(t)$ la cantidad de cloro presente en el tanque en el instante de tiempo $t$ (medido en minutos). Tenemos que la tasa de cambio de la cantidad de cloro es

$$\frac{dy}{dt} = R_1 - R_2,$$

donde $R_1$ es la rapidez con la que entra el cloro al tanque y $R_2$ es la rapidez con la que sale (el cloro). Observamos que la solución es bombeada hacia afuera más rápido que hacia adentro, por lo que tenemos que el tanque se está vaciando y la cantidad de solución en el tanque es entonces $(40 + (4-8)t)L = (40-4t)L$. Tenemos que

$$R_1 = \left(\frac{1}{4}kg/L\right)(4L/min) = 1kg/min$$

y

$$R_2 = \left(\frac{y(t)}{40-4t}kg/L\right)(8L/min) = \frac{8y(t)}{40-4t}kg/L = \frac{2y(t)}{10-t}kg/min.$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{2y(t)}{10-t}, y(0) = 10.$$

Reescribiendo nuestra ecuación tenemos que

$$y' + \frac{2}{10-t}y = 1, y(0) = 10$$

y esta ecuación diferencial se puede resolver multiplicando por el factor integrante

$$e^{\int \frac{2}{10-t}dt} = e^{-2\ln|10-t|} = e^{\ln\left(|10-t|^{-2}\right)} = \frac{1}{(10-t)^2} = \frac{1}{(t-10)^2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
y' + \frac{2}{10-t}y &= 1 \Rightarrow y'\frac{1}{(t-10)^2} + \frac{2}{10-t}\frac{1}{(t-10)^2}y = \frac{1}{(t-10)^2} \\
&\Rightarrow \left(y\frac{1}{(t-10)^2}\right)' = \frac{1}{(t-10)^2} \\
&\Rightarrow \frac{y}{(t-10)^2} = \int \frac{1}{(t-10)^2}dt = -\frac{1}{t-10} + C.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y = 10 - t + C(t-10)^2.$$

Recordando que $y(0) = 10$, tenemos que

$$10 = y(0) = 10 + C(10)^2 = 10 + 100C \Rightarrow C = 0.$$

Finalmente

$$y = 10 - t.$$

Por lo tanto después de 5 minutos hay 5kg de cloro en el tanque.

**Solución 2.2.** Observamos que la ecuación diferencial

$$y' - 3y = -5y^2 e^{2x}$$

es de Bernoulli y que la función constante $y = 0$ satisface la ecuación, pero no la condición inicial dada $y(0) = 2$. Para aquellos $x$ tal que $y(x) \neq 0$, multiplicamos por $y^{-2}$ nuestra ecuación diferencial para obtener

$$y'y^{-2} - 3y^{-1} = -5e^{2x}.$$

Ahora hacemos la sustitución $\omega = y^{-1}$ y entonces $\omega' = -y^{-2}y'$ por lo que nuestra ecuación diferencial se convierte en

$$-\omega' - 3\omega = -5e^{2x}, \text{ es decir, } \omega' + 3\omega = 5e^{2x}.$$

Esta última ecuación es una ecuación diferencial lineal primer orden por lo que para resolverla multiplicamos por el factor integrante $e^{\int 3dx} = e^{3x}$, obteniendo

$$e^{3x}\omega' + 3e^{3x}\omega = 5e^{5x} \Rightarrow \left(e^{3x}\omega\right)' = 5e^{5x}.$$

Integrando esto último obtenemos que

$$e^{3x}\omega = \int 5e^{5x}dx = e^{5x} + C,$$

por lo que $\omega = e^{2x} + e^{-3x}C$. Recordando que $\omega = y^{-1}$, tenemos ahora que

$$y^{-1} = e^{2x} + e^{-3x}C \Rightarrow y = \frac{1}{e^{2x} + e^{-3x}C}$$

donde para hacer esto último asumimos que $x$ y $C$ son tales que $e^{2x} + e^{-3x}C \neq 0$. Recordando la condición inicial $y(0) = 2$, tenemos que

$$2 = y(0) = \frac{1}{e^{2\cdot 0} + e^{-3\cdot 0}C} = \frac{1}{1+C} \Rightarrow 1 + C = \frac{1}{2}$$

lo que implica que $C = -\frac{1}{2}$. Entonces la solución es

$$y = \frac{1}{e^{2x} - \frac{e^{-3x}}{2}}.$$

Ahora buscamos el intervalo más grande donde nuestra solución es válida. Queremos evitar que $e^{2x} - \frac{e^{-3x}}{2} = 0$. Resolvemos esto,

$$\begin{aligned} e^{2x} - \frac{e^{-3x}}{2} &= 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - e^{-3x} = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} = e^{-3x} \\ &\Leftrightarrow \log\left(2e^{2x}\right) = \log\left(e^{-3x}\right) \Leftrightarrow \log(2) + \log\left(e^{2x}\right) = \log\left(e^{-3x}\right) \\ &\Leftrightarrow \log(2) + 2x = -3x \Leftrightarrow x = -\frac{\log(2)}{5}. \end{aligned}$$

Entonces los intervalos posibles son $\left(-\infty, -\frac{\log(2)}{5}\right)$ y $\left(-\frac{\log(2)}{5}, \infty\right)$, pero como 0 tiene que pertenecer al intervalo y $-\frac{\log(2)}{5} < 0$ (ya que $\log(2) > 0$)[2], el intervalo es $\left(-\frac{\log(2)}{5}, \infty\right)$. Resumiendo, la solución es

$$y = \frac{1}{e^{2x} - \frac{e^{-3x}}{2}}, \text{ para } x > -\frac{\log(2)}{5}.$$

[2] Recuerde que la función logaritmo natural es estrictamente creciente y que $\log(1) = 0$. Esto implica que $0 = \log(1) < \log(2)$.